Κριτήριο του Cauchy

Εφαρμογή:

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+x^2\cdot\left(1+\eta\mu^2\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η f διαφορίσιμη στο $[0,+\infty)$ αλλά η παράγωγος f' είναι ασυνεχής στο $[0,+\infty)$

ΛΥΣΗ

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x+x\cdot\eta\mu^2\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

Διότι η συνάρτηση $x\cdot\eta\mu^2\frac{1}{x}\to 0$ όντας μηδενική επί φραγμένη

Άρα, υπάρχει η $f'(0)$ και μάλιστα ισούται με $\frac{1}{2}$

Έπειτα, εξετάζουμε εάν η f' ασυνεχής.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}+2x+2x\cdot\eta\mu^2\frac{1}{x}-2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+2x+2x\eta\mu^2\frac{1}{x}-2\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=?$$

Εξετάζουμε αν $\exists\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ με $g(x)=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

Έστω ότι υπάρχει, τότε από το κριτήριο του Cauchy:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x_1,x_2\in D_g): 0<|x_1-\xi|<\delta,\ 0<|x_2-\xi|<\delta\Rightarrow|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$

Ας είναι $\varepsilon=1$ και $\delta>0$ και έστω $x_1=\frac{1}{2k\pi}$ & $x_2=\frac{1}{2k\pi+\pi}$

τότε $|f(x_1)-f(x_2)|=|\sigma\upsilon\nu(2k\pi)-\sigma\upsilon\nu(2k\pi+\pi)|=1+1=2>\varepsilon=1$. Άτοπο

Άρα, δεν πληροί το κριτήριο του Cauchy $\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η f' δεν είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Αλλά, η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.